158 [Gri]

Matrices symétriques réelles et matrices hermitiennes.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, E espace euclidien

I] Algèbre linéaire et bilinéaire

1] Matrices symétriques réelles et hermitiennes

I.exo18

Définition 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est symétrique (resp. antisymétrique) si ${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$). On note $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) leur ensemble.

Exemple 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Proposition 3 : $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$

Corollaire 4 : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

Exemple 5 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

[Gri]

VIII.3

Définition 6 : Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que H est hermitienne si ${}^t\overline{H} = H$. On note $H_n(\mathbb{C})$ leur ensemble.

Exemple 7 : Les matrices symétriques sont hermitiennes

Remarque 8 : Les éléments diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels.

2] Endomorphismes symétriques, hermitiens et réduction

VII.8

Proposition 9 : Soit $f \in \mathrm{End}(E)$

Alors : $\exists! f^* \in \mathrm{End}(E) \mid \forall x, y \in E, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$

Définition 10 : Un tel endomorphisme est appelé adjoint de f.

Exemple 11 : Une réflexion par rapport à un hyperplan est un endomorphisme symétrique

Remarque 12 : Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors $A^* := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tA$

Proposition 13 : $f \in \mathrm{End}(E)$ est symétrique ssi $\exists \mathcal{B}$ base orthonormée de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.

VII.13

Proposition 14 : Soit E espace hermitien, $f \in \mathrm{End}(E)$

Alors : $\exists! f^* \in \mathrm{End}(E) \mid \forall x, y \in E, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$

VIII.5 [Gri]

Définition 15 : Un tel f^* est appelé adjoint de f.

Remarque 16 : Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors : $A^* := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\overline{A}$.

VIII.7

Proposition 17 : $f \in \mathrm{End}(E)$ est hermitienne ssi $\exists \mathcal{B}$ base orthonormée de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est hermitienne.

XXII.10 [Rom]

Définition 18 : Un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ est dit normal si : $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Exemple 19 : $S(E)$ et $A(E)$ sont des ensembles de normaux.

Lemme 20 : Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ normal et F sous-espace de E stable par u

Alors : $F^\perp$ est stable par u

Lemme 21 : Soit $u \in \mathrm{End}(E)$.

Alors : Il existe un sous-espace vectoriel P de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Lemme 22 : Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ normal

Alors : Il existe des sous-espaces de E : $P_1, \dots, P_r$ de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux stables par u où : $E = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i$

Théorème 23 : Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ normal.

Alors : $\exists \mathcal{B}$ base orthonormée de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & (0) \\ & R_1 & \\ (0) & & \ddots \; R_r \end{pmatrix}$ avec D_p diagonale, $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ avec $b_k \neq 0$ et $2r + p = n$.

IX.1

3] Formes bilinéaires symétriques et hermitiennes

IX.2 [Gri]

Définition 24 : Une forme bilinéaire sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est une application $b : E \times E \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à ses 2 variables.

La matrice de b dans la base $\{e_i\}_{i=1}^n$ est : $B = \mathrm{Mat}_{\{e_i\}}(b) = (b(e_i, e_j))$

On dit qu'une forme bilinéaire s sur E est symétrique si : $\forall x, y \in E$, $s(x, y) = s(y, x)$

IX.2 [Gri]

Proposition 25 : Une forme bilinéaire s est symétrique ssi $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(s)$ est symétrique.

Théorème 26 : Soit s forme bilinéaire symétrique.

Alors : (1) $q : \begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto s(x;x) \end{array}$ est une forme quadratique sur E.

(2) Réciproquement, pour tout q forme quadratique sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique $s : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in E$, $q(x) = s(x;x)$, donnée par :

$s(x;y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$ appelée forme polaire de q.

Exemple 27 : La forme polaire de $q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 5x_1x_2 - 6x_1x_3 + 7x_2x_3$ est : $s(x;y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3 + \frac{5}{2}x_1y_2 + \frac{5}{2}x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + \frac{7}{2}x_2y_3 + \frac{7}{2}x_3y_2$

II) Réduction et décomposition

1) Signature et réduction d'une forme quadratique

XV.3 [Rom]

Théorème 28 : (de réduction de Gauss) Soit q forme quadratique $\neq 0$.

Alors : $\exists r \in [\![1;n]\!] \setminus \exists (\lambda_i)_{i=1}^r \in \mathbb{K}^r \setminus \exists (\ell_i)_{i=1}^r \in E^*$ indépendantes $\setminus \forall x \in E$,

$$q(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, \ell_j^2(x)$$

Corollaire 29 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$

Alors : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \setminus {}^tPAP$ est diagonale

Théorème 30 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ de rang r.

Alors : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \setminus {}^tPAP$ est de la forme $\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $s+t=r$

Définition 31 : Le couple $(s;t)$ est appelé signature de q.

2) Théorème spectral

XII.13 [Gri]

Lemme 32 : Soit $f \in S(E)$

Alors : $Spec(f) \subseteq \mathbb{R}$ et les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux

Théorème 33 : (spectral réel) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Alors : $\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \setminus {}^tPAP$ est diagonale

Contrexemple 34 : N'est plus valable sur $\mathbb{C}$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique non-diagonalisable

Théorème 35 : Soit E espace hermitien, $f \in End(E)$ hermitien.

Alors : $Spec(f) \subseteq \mathbb{R}$, f est diagonalisable et les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Corollaire 36 : Soit $A \in H_n(\mathbb{C})$

Alors : $\exists U \in U_n(\mathbb{C}) \setminus {}^t\overline{U}AU$ est diagonale réelle.

XXII.9.2 [Rom]

Théorème 37 : (orthodiagonalisation simultanée) Soit $(u_i) \in S(E)^I$

Alors : $\exists \mathcal{B}$ base orthonormée où $Mat_{\mathcal{B}}(u_i)$ sont diagonales ssi les u_i commutent deux à deux

Corollaire 38 : Soit $(A_i) \in S_n(\mathbb{R})^I$

Alors : $\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \setminus \forall i \in I$, ${}^tPA_iP$ est diagonale ssi les A_i commutent 2à2

3) Décomposition polaire

XXII.8 XII.9.3 XII.9.4 [Rom]

Définition 39 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (resp. définie positive) si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x | Ax \rangle \geq 0$ (resp. $\forall x \in \mathbb{R}^{n*}$, $\langle x | Ax \rangle > 0$). On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) leur ensemble.

Théorème 40 : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$

Alors : $\exists ! \, B \in S_n^+(\mathbb{R}) \setminus A = B^2$

Théorème 41 : (de décomposition polaire) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Alors : $\exists ! (O;S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \setminus A = OS$

Corollaire 42 : L'application $\begin{array}{l} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ (O;S) \mapsto OS \end{array}$ est un homéomorphisme

Proposition 43 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Définition 44 : Soit $p,q \in \mathbb{N}^*$, $I_{(p;q)} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$.

On note $O(p;q) = \{ M \in GL_{p+q}(\mathbb{R}) \mid M I_{(p;q)} {}^tM = I_{(p;q)} \}$

Théorème 45 : Soit $p,q \in \mathbb{N}^*$.

Alors : $O(p;q)$ et $O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$ sont homéomorphes.

[H2G2]

III) Application à la résolution de systèmes linéaires

1) Décomposition LU et de Cholesky : méthodes directes

Soit $b \in \mathbb{K}^n$. On souhaite résoudre $Ax = b$.

Théorème 46 : (décomposition LU) Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\Delta^k := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix} \in GL_k(\mathbb{K})$.

Alors : $\exists! (L;U) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid U$ triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale tq : $A = LU$.

Remarque 47 : La condition du théorème s'applique en particulier si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exemple 48 :
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Théorème 49 : (décomposition de Cholesky) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Alors : $\exists! B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid B$ triangulaire inférieure à termes diagonaux positifs tels que $A = BB^*$

Remarque 50 : Dans la pratique, on n'a pas besoin de vérifier que A est définie positive mais uniquement que A est symétrique.

Remarque 51 : Le calcul de telles décomposition requièrent $\mathcal{O}(n^3)$ opérations arithmétiques.

2) Méthodes itératives de résolution de $Ax = b$

Définition 52 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On appelle décomposition régulière de A tout couple $(M;N) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = M - N$

Une méthode itérative basée sur une décomposition régulière $(M;N)$ est : $x_0 \in \mathbb{K}^n$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $Mx_{k+1} = Nx_k + b$. On dit que la méthode itérative converge si $\forall x_0 \in \mathbb{K}^n$, $x_n \xrightarrow[+\infty]{} x$ avec $Ax = b$.

Théorème 53 : Une méthode itérative converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$

Théorème 54 : Soit $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$ et $(M;N)$ une décomposition régulière de A.

Alors : $(M^* + N) \in H_n(\mathbb{C})$

Si de plus, $(M^* + N) \in H_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

VI.2 [All]

VIII.1 [All]

VIII.1 [All]

Références :

[Gri] Algèbre linéaire — Grifone

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie — Rombaldi

[H2G2] Histoires hédonistes de groupes et géométrie — Caldero

[All] Algèbre linéaire numérique — Allaire